هوشنگ شرقی

ریاضی کاربردی در فیزیک

حرکت با سرعت ثابت

مقدمه

دربارهٔ کاربردهای ریاضیات در علم فیزیک می‌توان ده‌ها مقاله نوشت. این کار را با بحث «مکانیک تحلیلی»، یعنی بررسی مباحث مرتبط با حرکت، مانند سرعت و شتاب، آغاز می‌کنیم. در این بخش به متحرک‌های با سرعت ثابت می‌پردازیم و سپس در بخش بعدی حرکت‌های شتاب‌دار را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه می‌توان با مدل‌سازی ریاضی و حل معادله‌ها و نامعادله‌ها، مسائل زیبایی را طرح و حل کرد.

چنان که می‌دانیم، وقتی متحرکی با سرعت ثابت V در زمان t مسافت d را می‌پیماید، $V=\frac{d}{t}$ و در واقع، سرعت همان آهنگ تغییر مسافت در واحد زمان است و واحد اندازه‌گیری سرعت متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ یا کیلومتر بر ساعت $(\frac{km}{h})$ است.

مثال ۱. خواهر و برادری از دو سر یک کوچهٔ ۲۰۰ متری به طرف هم می‌دوند. خواهر با سرعت $۲\frac{m}{s}$ و برادر با سرعت $۳\frac{m}{s}$ می‌دود. چند ثانیه بعد و در کجای کوچه به هم می‌رسند؟

حل: اگر پس از t ثانیه خواهر و برادر به هم برسند، و طبق دستور گفته شده، اگر مسافت طی شده توسط آن‌ها به ترتیب $d_۱$ و $d_۲$ باشد، داریم: $۲=\frac{d_۱}{t}$ و $۳=\frac{d_۲}{t}$ و در نتیجه: $d_۱=۲t$ و $d_۲=۳t$. چون: $d_۱+d_۲=۲۰۰$، پس: $۲t+۳t=۲۰۰$، $۵t=۲۰۰$ و $t=۴۰$. یعنی ۴۰ ثانیه بعد به‌هم می‌رسند و در این مدت، خواهر ۸۰ متر و برادر ۱۲۰ متر طی کرده‌اند. در حالت کلی، اگر دو متحرک با سرعت‌های $V_۱$ و $V_۲$ از دو طرف مسیری به طول L به طرف هم حرکت کنند، با همین روش نتیجه می‌گیریم که پس از زمان $t=\frac{L}{V_۱+V_۲}$ به هم می‌رسند و اولی به

اندازهٔ $\frac{LV_1}{V_1+V_2}$ و دومی به اندازهٔ $\frac{LV_2}{V_1+V_2}$ طی مسیر می‌کنند. این دستورها را به‌خاطر بسپارید.

مثال ۲. داستان روباه و خرگوش پیر!

خرگوش تا جوان بود، به آسانی از چنگ روباه فرار می‌کرد و سرعت دویدن او از سرعت روباه بیشتر بود. ولی حالا خرگوش پیر شده و سرعت دویدنش فقط $۶\frac{m}{s}$ است. اما روباه با سرعت $۸\frac{m}{s}$ می‌دود. خرگوش در راه رفتن به لانه‌اش بود که با گوش‌های تیزش صدای حرکت روباه را در ۲۰۰ متری پشت سرش شنید و بلافاصله به طرف لانه‌اش دوید. حداکثر فاصلهٔ او تا لانه‌اش چقدر باید باشد تا بتواند از چنگ روباه فرار کند؟

حل: برای حل این مسئله یک مدل ریاضی می‌سازیم. فرض می‌کنیم خرگوش در فاصلهٔ x از لانه‌اش باشد. به این ترتیب روباه در فاصلهٔ x+۲۰۰ از لانهٔ خرگوش است. با توجه به دستور $V=\frac{d}{t}$، زمان لازم برای رسیدن خرگوش به لانه‌اش $\frac{x}{۶}$ و زمان رسیدن روباه به آنجا $\frac{x+۲۰۰}{۸}$ است. برای آنکه خرگوش زودتر به لانه برسد، باید داشته باشیم: $\frac{x}{۶}<\frac{x+۲۰۰}{۸}$ و با حل این نامعادله خواهیم داشت:

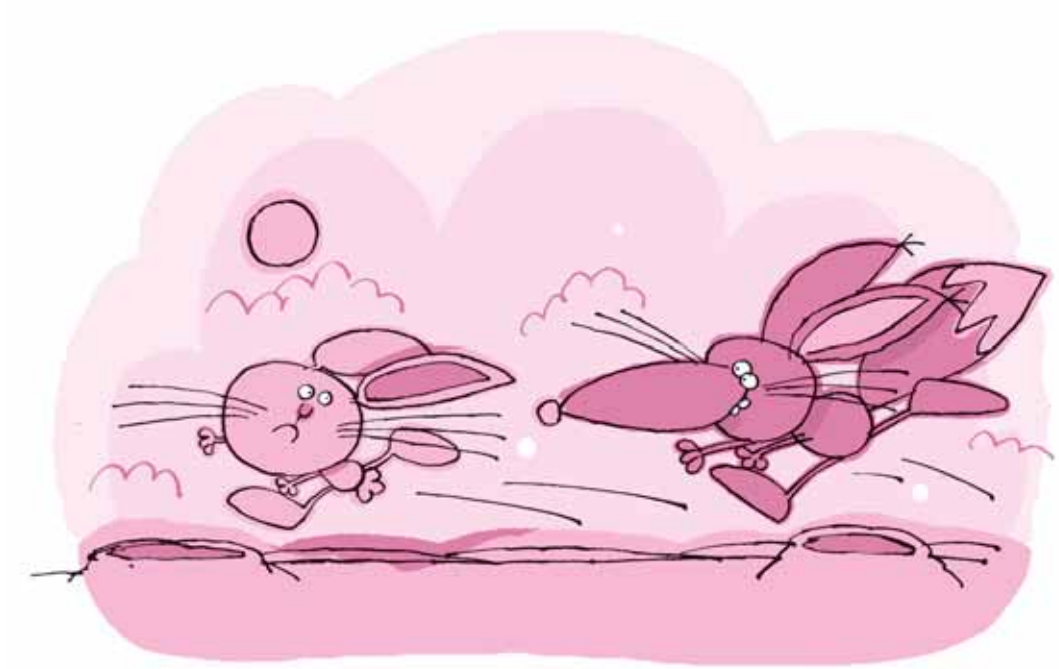
$$\frac{x}{۳}<\frac{x+۲۰۰}{۴}\Rightarrow ۴x<۳x+۶۰۰\Rightarrow x<۶۰۰$$

یعنی فاصلهٔ خرگوش از لانه‌اش باید کمتر از ۶۰۰ متر باشد تا بتواند به سلامت به لانه‌اش برسد و اگر از این بیشتر باشد، شکار روباه می‌شود!

مثال ۳. داستان روباه و خرگوش جوان!

لانهٔ خرگوش جوان به اندازهٔ کافی ایمن نیست و او تصمیم می‌گیرد که جای لانه‌اش را عوض کند. او لانهٔ دیگری در فاصله‌ای از لانه‌اش تعبیه می‌کند که کاملاً مطمئن است. در حال حرکت به سمت لانهٔ قدیمی‌اش است که دقیقاً در میانهٔ مسیر متوجه روباه می‌شود که در فاصلهٔ ۲۰۰ متری لانهٔ قدیمیش ایستاده است. سرعت حرکت روباه همان $۸\frac{m}{s}$ است، اما سرعت حرکت خرگوش جوان به $۱۲\frac{m}{s}$ می‌رسد. خرگوش باید با سرعت به لانهٔ قدیمی‌اش برود و بچه‌اش را بردارد و با خود به سمت لانهٔ جدید ببرد. مشکل اینجاست که سرعت دویدن بچه خرگوش فقط $۶\frac{m}{s}$ است و در مسیر حرکت به سمت لانهٔ جدید خرگوش باید سرعت خود را با سرعت بچه‌اش تنظیم کند. فاصلهٔ بین دو لانه حداکثر چقدر باید باشد تا خرگوش‌ها به سلامت به لانهٔ جدیدشان برسند؟

حل: همان‌طور که گفته شد، خرگوش در وسط مسیر دو لانه است. پس فرض می‌کنیم فاصلهٔ او از دو لانه x باشد. در این صورت، خرگوش در مدت زمان $\frac{x}{۱۲}$ خود را به لانه‌اش می‌رساند و با بچه خرگوش در مدت $\frac{۲x}{۶}$ خود را به لانهٔ جدید می‌رسانند. به همین ترتیب، زمان حرکت روباه را هم تا لانهٔ جدید محاسبه کنید و با تشکیل یک نامعادله، نتیجه بگیرید که فاصلهٔ دو لانه نباید از ۳۰۰ متر بیشتر باشد.



مثال ۴. **کاوه، بیژن** و **پرویز** دوستانی صمیمی هستند که می‌خواهند به خانهٔ دوستشان **هرمز** بروند که در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری محلهٔ آن‌هاست. آن‌ها فقط یک دوچرخه دارند که سرعت حرکت آن در این مسیر ۳۰ کیلومتر در ساعت است. سرعت حرکت خودشان به صورت پیاده ۶ کیلومتر در ساعت است. قرار می‌شود که یکی از آن‌ها، مثلاً کاوه، با دوچرخه‌اش، یکی دیگر، مثلاً بیژن را همراه ببرد و بعد از رسیدن به منزل هرمز او را پیاده کند. در بازگشت هم، پرویز را که پیاده آمده است، در جایی از مسیر سوار کند و دوتایی با هم به خانهٔ هرمز بروند و به همین ترتیب عمل می‌کنند.

در خانهٔ هرمز بیژن گفت: «راستی بچه‌ها چقدر طول کشید تا به این‌جا رسیدیم؟»

کاوه: کاری ندارد، محاسبه کنیم! چون سرعت دوچرخهٔ ما ۳۰ کیلومتر در ساعت است و مسیر ما ۱۰ کیلومتر بود، پس $\frac{۱}{۳}$ ساعت یا ۲۰ دقیقه طول کشید تا ما (من و بیژن) به اینجا برسیم. بعد من بیژن را پیاده کردم. در این ۲۰ دقیقه (یا $\frac{۱}{۳}$ ساعت) پرویز با توجه به سرعتش (۶ کیلومتر در ساعت) ۲ کیلومتر حرکت کرده است.

حالا من با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و پرویز با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت به طرف هم حرکت می‌کنیم و طول مسیرمان هم ۸ کیلومتر است. پس طبق دستور $t = \frac{d}{V_۱ + V_۲}$ زمان رسیدن ما به هم $t = \frac{۸}{۳۰+۶}$ و یا $\frac{۲}{۹}$ ساعت بعد از حرکتمان است. اما وقتی به هم رسیدیم، دوباره همین مسیر را دو نفره باید برمی‌گشتیم. پس $\frac{۲}{۹}$ ساعت دیگر هم طول کشید تا دوتایی به اینجا برسیم. یعنی در مجموع $\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{۷}{۹}$ ساعت طول کشید تا به اینجا برسیم.

بیژن: من فکر می‌کنم می‌شد زودتر به اینجا برسیم!

کاوه: چطور؟

بیژن: اگرچه به ضرر من است (!) ولی باید بگویم، در آن مدتی که من اینجا در منزل هرمز منتظر شما بودم، بی‌کار نشسته بودم، در حالی‌که می‌شد تو مرا قبل از رسیدن به منزل هرمز پیاده کنی تا در مدت زمانی که برمی‌گردی و پرویز را با خودت می‌آوری، من هم حرکتی کرده باشم و سه‌تایی با هم به اینجا برسیم!

کاوه: خب یعنی باید تو را کجای مسیر پیاده می‌کردم؟

و بیژن با محاسبه‌ای دیگر جواب او را داد. حالا دوستان عزیز، آیا شما هم می‌توانید این محاسبه را انجام دهید؟ کاری ندارد! فرض کنید، کاوه بیژن را در x کیلومتر مانده به خانهٔ هرمز پیاده کند. پس ۱۰ - x کیلومتر را به اتفاق او با دوچرخه پیموده است. بعد برمی‌گردد تا پرویز را سوار کند و دوتایی با هم به مقصد بروند. با محاسبهٔ زمان رسیدن آن‌ها به هم و زمان برگشت و مساوی قرار دادن مجموع این دو زمان با زمان رسیدن بیژن به مقصد، معادله‌ای تشکیل دهید و x را بیابید. (جواب: $x=۲/۵km$ و در این صورت مجموع زمان رسیدن سه دوست به منزل هرمز، $\frac{۲}{۳}$ ساعت یا ۴۰ دقیقه خواهد بود که از زمان $\frac{۷}{۹}$ ساعت کمتر است! و در این صورت حدود ۷ دقیقه زودتر می‌رسیدند.)

کارمان را با یک تمرین خوب و تفکربرانگیز به پایان می‌بریم.

تمرین:

یک‌بار دیگر همین سه دوست تصمیم گرفتند طول خیابان دکتر **شریعتی** تهران را که ۱۵ کیلومتر است، از ابتدا (پیچ شمیران) تا انتها (میدان قدس) پیاده‌روی کنند! صبح زود پرویزآمد و چون دوستانش را ندید، خودش پیاده رو به بالا حرکت کرد. مدتی بعد بیژن آمد و دید کاوه با دوچرخه‌اش آمده است (!) از همان‌جا بیژن پیاده و کاوه با دوچرخه حرکت کردند و کاوه وقتی به پرویز رسید، دوچرخه‌اش را به او داد و خودش بقیهٔ راه را پیاده ادامهٔ مسیر داد.

اما پرویز وقتی دوچرخه را گرفت برگشت تا به بیژن رسید و دوچرخه را به او داد و خودش به خانه رفت. بیژن هم با دوچرخه به سمت میدان قدس رفت و وقتی به آنجا رسید، کاوه هم هم‌زمان با او رسید! اگر سرعت پیاده ۶ و با دوچرخه ۱۵ کیلومتر در ساعت باشد، صبح آن روز پرویز چه مدت زودتر از دوستانش آمده بود؟